第28卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 1
2011年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0139-04

支付红利的最优投资消费模型研究*

赵小艳， 段启宏

(西安交通大学理学院统计金融系，西安 710049)

摘　要: 研究支付红利的期望终端资产效用和消费效用问题．对一类CRRA型效用函数，运用Feynman-Kac公式，通过有效变换，给出最优问题的值函数的随机表示解，并用反馈形式给出了最优投资消费策略.

关键词: 最优投资消费；红利；粘性解；CRRA型效用函数；Feynman-Kac公式

分类号: **AMS**(2000) 90A09; 93E20　　**中图分类号**: F224; F830　　**文献标识码**: A

1　引言

多文献都用随机微分方程来描述证券的价格过程．Merton[1]最早用随机微分方程研究常系数的连续时间最优投资消费问题，但没有考虑不完备市场中的随机收入、红利支付及交易费用等情况．Zariphopoulou[2]也没有考虑这些情况．文献[3]考虑系数与时间有关的红利支付的最优投资消费问题，随后文献[4]考虑有红利支付和随机收入的常系数情形．文献[5]用Legendre变换给出有红利支付和随机收入的常系数情形的解析形式．本文综合考虑以上情形，研究有红利支付的非线性股票动态的最优投资消费问题，求出最优问题的值函数是其对应的HJB方程的惟一粘性解，证明了最优投资消费策略是存在的．对一类CRRA型效用函数，通过对值函数做有效的变换，用反馈形式给出了最优投资策略和最优消费策略，并且用Feynman-Kac公式给出值函数的随机形式解.

2　模型的描述

假设金融市场上存在一种无风险资产(如银行存款或债券)，其价格B_t满足：$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t$, $B_0 = B$，常数$r > 0$表示银行利率．另一种是风险资产(如股票)，其价格S_t满足$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t)S_t\mathrm{d}t + \sigma(S_t)S_t\mathrm{d}W_t$, $S_0 = S \geq 0$，W_t是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$上的标准Brownian运动，系数$\mu : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$和$\sigma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$是当前风险资产价格的函数，满足下面的条件使得上述风险资产的价格方程存在惟一解.

假设1　对所有的$S > 0$, $\mu(S) > r$, $\mu(0) = r$和$\frac{(\mu(S)-r)^2}{\sigma^2(S)} \leq M$，其中$M$是正常数.

假设2　若f表示$\mu(S)S$和$\sigma(S)S$，则对所有$S \geq 0$，存在正常数L使得$|f(S) - f(\bar{S})| \leq L|S - \bar{S}|$, $f^2(S) \leq L(1 + S^2)$.

假设3　对任意的$t \leq s \leq T$，如果$S_t > 0$，则$S_s > 0$；如果$S_t = 0$，则$S_s = 0$.

给定到期时间T，投资者可以任意选取起始时间$t, 0 \leq t \leq T$，而在区间$[t,T]$上进行投资．π_s^0和π_s分别表示s时刻分别投资在债券和股票上的资产额，c_s为时刻s的消费率，b为

收稿日期: 2009-04-14.　**作者简介**: 赵小艳(1976年8月生)，女，博士，讲师．研究方向：金融数学.

***基金项目**: 国家自然科学基金(70971109)；西安交通大学交叉学科项目基金(2009xjtujc33).

投资者在单位时间内每一货币单位股票上所得的红利收入，则投资者的资产过程满足 $X_s = \pi_s^0 + \pi_s$ 和

$$\mathrm{d}X_s = rX_s\mathrm{d}s + \big(\mu(S_s) + b - r\big)\pi_s\mathrm{d}s - c_s\mathrm{d}s + \sigma(S_s)\pi_s\mathrm{d}W_s, \quad X_t = x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq s \leq T.$$

对 $t \leq s \leq T$，称投资消费策略 (π_s, c_s) 为容许策略，如果它是 $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u : t \leq u \leq s)$ 渐进可测的，且 $X_s \geq 0$, $E\int_t^T c_s\mathrm{d}s < +\infty$, $E\int_t^T \sigma(S_s)^2\pi_s^2\mathrm{d}s < +\infty$. 记容许策略的全体为 $\mathcal{A}$.

投资者的目标为最大化他的期望消费效用和终端资产效用，即

$$v(t,x,S) = \sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}} E\Big[U_1(X_T) + \int_t^T U_2(c_s)\mathrm{d}s \,\Big|\, X_t = x,\, S_t = S\Big], \tag{1}$$

其中 U_1, U_2 为效用函数，满足下面的条件：

1) $U : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是严格增、严格凹的 $C^2(0,+\infty)$ 函数；

2) 存在常数 $M > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$，使得 U 满足增长条件，对任意的 $c \geq 0$，有 $U(c) \leq M(1+c)^\gamma$.

3 主要结论

对 (1) 进行随机分析，应用随机控制理论[5]，得到值函数 v 满足的 HJB 方程

$$\begin{aligned} &v_t + \max_\pi \Big[\frac{1}{2}\sigma^2(S)\pi^2 v_{xx} + \sigma^2(S)\pi S v_{xS} + \big(\mu(S) + b - r\big)\pi v_x\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2 v_{SS} + \mu(S)S v_S + rxv_x + \max_{c\geq 0}\big[-cv_x + U_2(c)\big] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

引理1 最优问题 (1) 的值函数 $v(t,x,S)$ 关于变量 x 是凹函数和非降函数.

由效用函数的凹性和容许策略的非降性立即可得该结论.

定理1 最优问题 (1) 的值函数 v 是 HJB 方程 (2) 的惟一限制粘性解.

证明可参考文献 [2] 中 Theorem 3.1 和 Theorem 3.2.

现在，考虑相对厌恶风险 (CRRA) 效用函数 $U(c) = \frac{1}{\gamma}c^\gamma$，其中 $1-\gamma$ 称做厌恶风险系数，满足 $0 \leq 1-\gamma < 1$，$\gamma = 0$ 就是对数效用函数 $U(c) = \log(c)$.

取 $U_1(x) = U_2(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$，(1) 和 (2) 分别变为

$$v(t,x,S) = \sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}} E\Big[\frac{1}{\gamma}X_T^\gamma + \int_t^T \frac{1}{\gamma}c_s^\gamma\mathrm{d}s \,\Big|\, X_t = x,\, S_t = S\Big], \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &v_t + \max_\pi \Big[\frac{1}{2}\sigma^2(S)\pi^2 v_{xx} + \sigma^2(S)\pi S v_{xS} + \big(\mu(S) + b - r\big)\pi v_x\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2 v_{SS} + \mu(S)S v_S + rxv_x + \max_{c\geq 0}\Big[-cv_x + \frac{1}{\gamma}c^\gamma\Big] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

上式中的两个极值分别在下面点处取得

$$\pi^*(t,x,S) = -\Big[\frac{Sv_{xS}}{v_{xx}} + \frac{\big(\mu(S) + b - r\big)v_x}{\sigma^2(S)v_{xx}}\Big], \quad c^*(t,x,S) = v_x^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

由引理1和 X_s 的线性性质，v 可以写成形式

$$v(t,x,S) = \frac{x^\gamma}{\gamma}w(t,S)^{1-\gamma}, \tag{5}$$

由 (4) 得 $w(t,S)$ 满足的方程为

$$w_t+\frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2w_{SS}+\Big[\mu(S)S+\frac{\gamma}{1-\gamma}\big(\mu(S)+b-r\big)S\Big]w_S$$
$$+\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big[r+\frac{\big(\mu(S)+b-r\big)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2(S)}\Big]w+1=0. \tag{6}$$

下面定理是本文的主要结论.

定理 2　1)　最优问题 (3) 中的值函数 $v(t,x,S)$ 具有 (5) 的表示形式，其中 $w:[0,T]\times R^+\to R^+$ 是 (6) 和下面边界条件的惟一粘性解

$$w(T,S)=1,\quad w(t,0)=\Big(1+\frac{1-\gamma}{r\gamma}\Big)\mathrm{e}^{\frac{r\gamma}{1-\gamma}(T-t)}-\frac{1-\gamma}{r\gamma}. \tag{7}$$

2)　对任意的 $t\le s\le T$，最优投资策略 $\pi_s^*=\pi^*(s,X_s^*,S_s)$ 有下面的反馈形式

$$\pi^*(s,x,S)=\Big[\frac{Sw_S(s,S)}{w(s,S)}+\frac{\mu(S)+b-r}{(1-\gamma)\sigma^2(S)}\Big]x. \tag{8}$$

3)　最优消费策略 $c_s^*=c^*(s,X_s^*,S_s)$, $t\le s\le T$ 具有下面的反馈形式

$$c^*(s,x,S)=\frac{x}{w(s,S)}, \tag{9}$$

其中 X_s^* 是下面随机微分方程的解 $X_s^*=rX_s^*\mathrm{d}s+\big(\mu(S_s)+b-r\big)\pi_s^*\mathrm{d}s-c_s^*\mathrm{d}s+\sigma(S_s)\pi_s^*\mathrm{d}W_s$.

证明　首先，由假设 (3) 立即可得边界条件 (7)，再由文献 [6-8] 可证得方程 (6) 有满足边界条件 (7) 的惟一粘性解. 其次，对 $F(t,x,S)=\frac{x^\gamma}{\gamma}w(t,S)$ 应用粘性解的定义，证得 F 是方程 (6) 在 $0\le t<T$ 和 $x>0$, $S>0$ 上的粘性解. 由 $\lim\limits_{x\to 0}F_x(t,x,S)=+\infty$ 可得 F 在 $0\le t<T$, $S\ge 0$ 上有粘性下解. 因此，F 是方程 (4) 的限制粘性解，在 (4) 的粘性解集中，又由于定理 1 已经证得方程 (4) 粘性解是惟一的，因此可得 $v(t,x,S)=F(t,x,S)=\frac{x^\gamma}{\gamma}w(t,S)^{1-\gamma}$.

由随机控制理论[9]，可以将最优投资消费策略写成 $\pi_s^*=\pi^*(s,X_s^*,S_s)$ 和 $c_s^*=c^*(s,X_s^*,S_s)$，结合 (4) 中的极值点可得定理中的最优投资消费策略 (8) 和 (9).

下面求解方程 (6). 为了简化起见，不妨设

$$k(S)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\big(\mu(S)+b-r\big)S,\quad m(S)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big[r+\frac{(\mu(S)+b-r)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2(S)}\Big],$$

式 (6) 变成

$$w_t+\frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2w_{SS}+\big[\mu(S)S+k(S)\big]w_S+m(S)w+1=0, \tag{10}$$

由 Feynman-Kac 公式[10]，可以表示上面方程的随机解

$$w(t,S)=\tilde{E}\Big[\mathrm{e}^{\int_t^T m(\tilde{S}_s)\mathrm{d}s}+\int_t^T\mathrm{e}^{\int_t^s m(\tilde{S}_u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\,\big|\,\tilde{S}_t=S\Big],$$

其中 $\tilde{S}_s$, $t\le s\le T$ 满足方程 $\mathrm{d}\tilde{S}_s=[\mu(\tilde{S}_s)\tilde{S}_s+k(\tilde{S}_s)]\mathrm{d}s+\sigma(\tilde{S}_s)\tilde{S}_s\mathrm{d}\tilde{W}_s$，$\tilde{W}_s$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_1,\mathbf{Q})$ 上的标准 Brownian 运动，$\tilde{E}$ 是对 Q 取期望. 比较上面的随机微分方程与股票的价格方程，它们很相似，只是有漂移 $k(\tilde{S}_s)$.

因此，最优问题 (3) 的随机表示解为

$$v(t,x,S)=\frac{x^\gamma}{\gamma}\Big(\tilde{E}\Big[\mathrm{e}^{\int_t^T m(\tilde{S}_s)\mathrm{d}s}+\int_t^T\mathrm{e}^{\int_t^s m(\tilde{S}_u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\,\big|\,\tilde{S}_t=S\Big]\Big)^{1-\gamma}. \tag{11}$$

容易看出，当 $S\to 0$，方程 (10)“收敛”到 $w_t+\frac{r\gamma}{1-\gamma}w+1=0$，该方程的解为 $w(t,0)=(1+\frac{1-\gamma}{r\gamma})\mathrm{e}^{\frac{r\gamma}{1-\gamma}(T-t)}-\frac{1-\gamma}{r\gamma}$，包含边界条件 (7).

4 结束语

利用随机微分方程、随机控制理论，对有红利支付的非线性股票动态的最优投资消费问题进行研究，对一类CRRA型效用函数，得出反馈形式的最优投资消费策略公式(8)和(9)，给出最优值函数的随机表示解(11). 这个模型可以用来描述投资银行、证券公司、政府部门等机构在投资决策过程中的决策问题，有广阔的应用前景.

参考文献:

[1] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373-413

[2] Zariphopoulou T. Optimal investment and consumption models with non-linear stock dynamics[J]. Mathematical Methods of Operation Research, 1999, 50: 271-296

[3] 费为银. 考虑红利支付的最优投资消费模型研究[J]. 安徽机电学院学报，1997, 4: 62-67
Fei W Y. Study on consumption and investment model considering dividend payment[J]. Journal of Anhui Institute of Mechanical and Electrical Engineering, 1997, 4: 62-67

[4] 丁传明，邹捷中. 考虑随机收入和红利支付的最优投资消费模型研究[J]. 长沙铁道学院学报，2003, 3: 93-96
Ding C M, Zou J Z. Study on optimal investment and consumption model considering dividend payment and stochastic income in incomplete markets[J]. Journal of Changsha Railway University, 2003, 3: 93-96

[5] 肖建武. 考虑红利支付和随机收入的最优投资消费的解析决策[J]. 统计与决策，2006, 9: 10-11
Xiao J W. Decision on optimal investment and consumption considering divident payment and stochastic income[J]. Statistics and Decision, 2006, 9: 10-11

[6] Ishii H, Lions P L. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1990, 83: 26-78

[7] Lions P L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations 1: the dynamic programming principle and applications[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1983, 8: 1101-1174

[8] Lions P L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations 2: viscosity solutions and uniqueness[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1983, 8: 1229-1276

[9] Bernt Ø. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1998

[10] Karatzas I, Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

Optimal Investment and Consumption Models with Dividend Payment

ZHAO Xiao-yan, DUAN Qi-hong

(Department of Statistics and Finance, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: This paper discusses the problem of the expected utility from terminal wealth and consumption with dividend payment. Through employing a transformation on the CRRA utility function, we are able to derive the stochastic representation of the value function by Feynman-Kac formula and get the optimal investment-consumption policies in the form of feedback function.

Keywords: optimal investment consumption; dividend; viscosity solution; CRRA utility function; Feynman-Kac formula

Received: 14 Apr 2009. **Accepted:** 24 Feb 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (70971109); the Interdiscipline Funds of Xi'an Jiaotong University (2009xjtujc33).